

E michael.ruzhansky@ugent.be
T +32 9 264 49 22

Campus Sterre
Krijgslaan 281 S8
B – 9000 Ghent
Belgium

www.ugent.be

Date	Contact	Phone	Email
06/05/2025	Kim Verbeeck	+32 9 264 45 24	kimpj.verbeeck@ugent.be

Review

of the PhD thesis of
Dosmagulova Karlygash

“Correctly solvable problems for the Laplace-Beltrami operator
on a Riemannian sphere with cuts”

This PhD thesis is very specific and focused on mathematical research in the field of the theory of functions and differential equations on Riemannian surfaces. This topic has relevance and significance in the context of both general scientific research and it is associated with more narrow and specialized research. The topic of the dissertation research is theoretical in nature.

Research of the Laplace-Beltrami operator and its solutions on Riemannian surfaces with cuts can be of fundamental mathematical importance. These studies can expand our understanding of geometry, topology, and analysis on such surfaces. Many mathematical concepts and models have applications in physics. Riemannian surfaces can be used to describe physical phenomena such as quantum mechanics, string theory. Understanding the solutions of the Laplace-Beltrami operator on such surfaces can be important for the development of physical models.

The first chapter investigates the study of the correctness of the Laplace-Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere, as well as the formulation of the maximum operator and its invertible constraints. The Green's function of the Laplace-Beltrami operator with a finite number of punctured points is studied. The spectral properties of the Laplace-Beltrami operator with delta-shaped perturbations are investigated.

In the second chapter, a solvable problem is formulated for the Laplace-Beltrami operator on a two-dimensional sphere punctured by the open curve. The fixed arc is removed from the sphere and additional conditions are written to guarantee the uniqueness of such a solution.

In the third chapter, a solvable problem for the Laplace-Beltrami operator on a three-dimensional sphere punctured by a closed curve is formulated and a uniquely solvable problem for the Laplace-Beltrami operator on a three-dimensional sphere punctured by a closed curve is investigated. The study of a uniquely solvable problem in this case requires more in-depth research, which the author of the work successfully completed. The complexity of the task is that the open curve, which is a cut of the Riemannian sphere, is not a hypersurface as in previous chapters. Not only a correctly solvable problem is posed, but also conditions for unique solvability.

In the fourth chapter, the spectral properties for the Laplace-Beltrami operator and the perturbed harmonic oscillator are studied. The thesis provides descriptions of linear functionals for an arbitrary point of a punctured sphere. The connection between the eigenvalues and the eigenfunctions of the operator is clearly shown and a complete description of the system of eigenfunctions is given. The discreteness property of the spectrum of the Laplace-Beltrami operator on a punctured two-dimensional sphere is proved. The same studies were carried out for a two-dimensional harmonic oscillator.

The validity and reliability of the scientific statements, conclusions and recommendations formulated in the dissertation are confirmed by the main results in publications included in the international Scopus database ("Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Applications", "Applied Mathematics and Information Sciences", "Results in Nonlinear Analysis", "Bulletin Kazakh National University – Mathematics, Mechanics and Informatics"). This is also confirmed by the use of well-known classical methods applied in operator theory; consistent justification and proof of each result obtained.

In my opinion, this thesis fulfils requirements for a doctoral dissertation, so I recommend that Karlygash Dosmagulova be awarded the PhD degree.

Michael Ruzhansky

Scientific supervisor:
Prof. Dr. Michael Ruzhansky
Ghent University, Ghent, Belgium

E michael.ruzhansky@ugent.be
Тел. +32 9 264 49 22Кампус Стерре
Кригслан 281 S8
В — 9000 Гент
Бельгия

www.ugent.be

Дата
06/05/2025Контакт
Ким ВербикТелефон
+32 9 264 45 24Электронная почта
kimpj.verbeeck@ugent.be

ОТЗЫВ

на диссертационную работу PhD

Досмағұловой Қарлығаш

«Корректно разрешимые задачи для оператора Лапласа-Бельтрами на римановой сфере с разрезами»

Данная диссертационная работа PhD весьма специфична и посвящена математическим исследованиям в области теории функций и дифференциальных уравнений на римановых поверхностях. Эта тема актуальна и значима как в контексте общенаучных исследований, так и в контексте более узких и специализированных исследований. Тема диссертационного исследования носит теоретический характер.

Исследование оператора Лапласа-Бельтрами и его решений на римановых поверхностях с разрезами может иметь фундаментальное математическое значение. Эти исследования могут расширить наше понимание геометрии, топологии и анализа на таких поверхностях. Многие математические понятия и модели находят применение в физике. Римановы поверхности могут быть использованы для описания физических явлений, таких как квантовая механика и теория струн. Понимание решений оператора Лапласа-Бельтрами на таких поверхностях может быть важно для разработки физических моделей.

В первой главе исследуется вопрос о корректности оператора Лапласа-Бельтрами на проколотой двумерной сфере, а также формулировка максимального оператора и его обратимых ограничений. Изучается функция Грина оператора Лапласа-Бельтрами с конечным числом проколотых точек. Исследованы спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами с дельтаобразными возмущениями.

Во второй главе формулируется задача разрешимости для оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере, проколотой незамкнутой кривой. Из сферы удаляется неподвижная дуга и выписываются дополнительные условия, гарантирующие единственность такого решения.

В третьей главе формулируется задача разрешимости для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой, и исследуется однозначно разрешимая задача для оператора Лапласа-Бельтрами на трёхмерной сфере, проколотой замкнутой кривой. Изучение однозначно разрешимой задачи в этом случае требует более глубокого исследования, которое автор работы успешно выполнил. Сложность задачи заключается в

том, что незамкнутая кривая, являющаяся разрезом римановой сферы, не является гиперповерхностью, как в предыдущих главах. При этом ставится не только корректно разрешимая задача, но и условия её однозначной разрешимости.

В четвёртой главе изучаются спектральные свойства оператора Лапласа-Бельтрами и возмущённого гармонического осциллятора. В диссертации приведены описания линейных функционалов для произвольной точки проколотовой сферы. Наглядно показана связь между собственными значениями и собственными функциями оператора и дано полное описание системы собственных функций. Доказано свойство дискретности спектра оператора Лапласа-Бельтрами на проколотовой двумерной сфере. Аналогичные исследования проведены для двумерного гармонического осциллятора.

Обоснованность и достоверность сформулированных в диссертации научных утверждений, заключений и рекомендаций подтверждены основными результатами в публикациях, входящих в международную базу данных Scopus («Достижения теории нелинейного анализа и ее приложения», «Прикладная математика и информационные науки», «Результаты по нелинейному анализу», «Вестник Казахского национального университета – Математика, механика и информатика»).

Это подтверждается также использованием известных классических методов, применяемых в теории операторов, последовательным обоснованием и доказательством каждого полученного результата.

По моему мнению, данная диссертация соответствует требованиям, предъявляемым к докторской диссертации, поэтому я рекомендую Карлығаш Досмағұловой присудить ученую степень доктора PhD.

Михаил Ружанский

Научный руководитель:
Профессор, доктор Михаил Ружанский
Гентский университет, Гент, Бельгия